

---

---

## Terceira Lista de Teoria Eletromagnética I

---

---

1 - Considere um campo elétrico uniforme  $\mathbf{E}$ , apontando na direção  $z$ , formando um ângulo reto com um campo magnético  $\mathbf{B}$ , que aponta na direção  $x$ . Encontre e desenhe a trajetória de uma partícula de carga  $Q$ , quando esta parte da origem com as seguintes velocidades:

(a)  $\mathbf{v}(0) = (E/B)\hat{\mathbf{y}}$ ,

(b)  $\mathbf{v}(0) = (E/2B)\hat{\mathbf{y}}$ ,

(c)  $\mathbf{v}(0) = (E/B)(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$ .

2 - Suponha que o campo magnético em uma determinada região tenha a forma

$$\mathbf{B} = kz\hat{\mathbf{x}}$$

(onde  $k$  é uma constante). Encontre a força em um circuito quadrado (de lado  $a$ ), que está no plano  $yz$  e centrado na origem, se ele tem uma corrente  $I$ , que flui no sentido anti-horário quando se olha de cima do eixo  $x$ .

3 - (a) Encontre o campo magnético no centro de um circuito quadrado, pelo qual passa uma corrente estacionária  $I$ . Considere que  $R$  é a distância entre o centro e a lateral (figura 1).

(b) Encontre o campo no centro de um polígono de  $n$  lados, pelo qual passa uma corrente estacionária  $I$ . Novamente, considere que  $R$  é a distância entre o centro e qualquer um dos lados.

(c) Certifique-se de que sua fórmula se reduz ao campo no centro de um circuito circular, no limite  $n \rightarrow \infty$ .

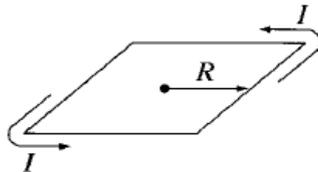


Figura 1: Problema 3

4 - Encontre o campo magnético no ponto  $P$  para cada uma das configurações de corrente estacionária mostradas na figura 2.

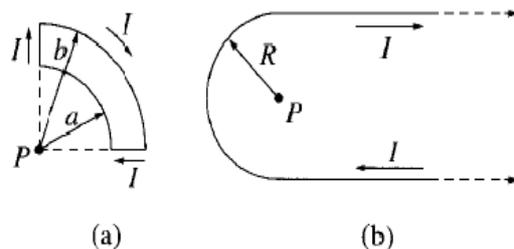


Figura 2: Problema 4

5 - Uma corrente estacionária  $I$  flui por um longo fio cilíndrico de raio  $a$  (figura 3). Encontre o campo magnético tanto dentro quanto fora do fio, se

- (a) a corrente está uniformemente distribuída sobre a superfície externa do fio.
- (b) a corrente está distribuída de forma que  $J$  é proporcional a  $s$ , a distância ao eixo.

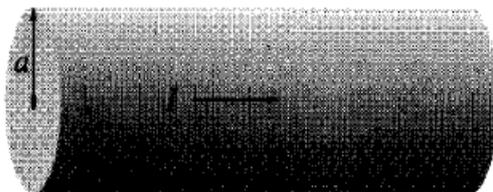


Figura 3: Problema 5

6 - Uma chapa grossa que se estende de  $z = -a$  a  $z = +a$  tem uma corrente volumétrica de densidade uniforme  $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{x}}$  (figura 4). Encontre o campo magnético como função de  $z$ , tanto dentro quanto fora da chapa.

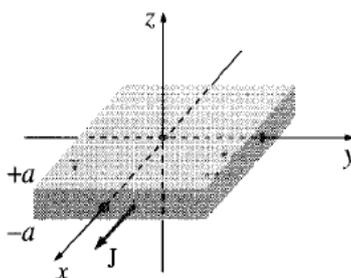


Figura 4: Problema 6

7 - Dois solenoides longos e coaxiais transportam, cada um, uma corrente  $I$ , mas em sentidos opostos, como mostra a figura 5. O solenoide interno (de raio  $a$ ) tem  $n_1$  voltas por unidade de comprimento, enquanto o externo (de raio  $b$ ) tem  $n_2$ . Encontre  $\mathbf{B}$  em cada uma das três regiões: (i) dentro do solenoide interno, (ii) entre eles e (iii) fora dos dois.

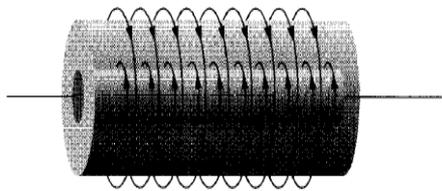


Figura 5: Problema 7

**8** - A lei de Ampère é coerente com a regra geral de que o divergente do rotacional é sempre zero? Demonstre que a lei de Ampère, em geral, *não* é válida fora da magnetostática. Esse 'defeito' existe nas outras três equações de Maxwell?

**9** - Encontre o potencial vetorial magnético de um segmento finito de fio reto pelo qual passa a corrente  $I$ . [Coloque o fio no eixo  $z$ , de  $z_1$  a  $z_2$ , e use a equação  $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl'$ .] Verifique se a sua resposta é coerente com a equação

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

que corresponde ao campo de um segmento arbitrário reto, de fio, em termos dos ângulos inicial e final  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (figura 6).

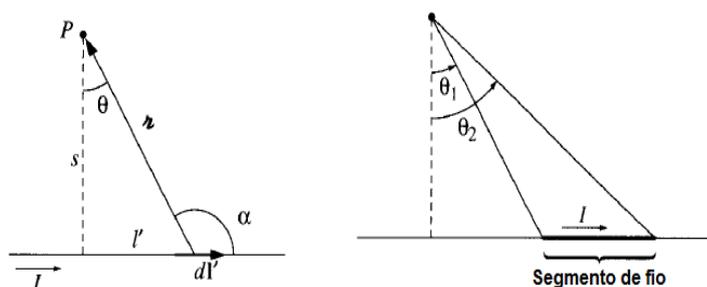


Figura 6: Problema 9

**10** - Que densidade de corrente produziria o potencial vetorial,  $\mathbf{A} = k\hat{\phi}$  (onde  $k$  é uma constante), em coordenadas cilíndricas?

**11** - (a) Usando quaisquer meios que possa imaginar (exceto a consulta), encontre o potencial vetorial a uma distância  $s$  de um fio reto pelo qual passa uma corrente  $I$ . Verifique se  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

(b) Encontre o potencial vetorial *dentro* do fio, se ele tem raio  $R$  e a corrente está uniformemente distribuída.

**12** - Deduza a equação  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ . [Eis uma maneira: assuma que o dipolo é um quadrado infinitesimal de lado  $\epsilon$  (se não for, corte-o em quadrados e aplique o argumento a cada um deles). Escolha eixos, como mostra a figura 7, e calcule  $\mathbf{F} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$  ao longo de cada um dos quatro lados. Faça a expansão de  $\mathbf{B}$  em uma série de Taylor - do lado direito, por exemplo,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(0, \epsilon, z) \cong \mathbf{B}(0, 0, z) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \Big|_{(0,0,z)}$ .]

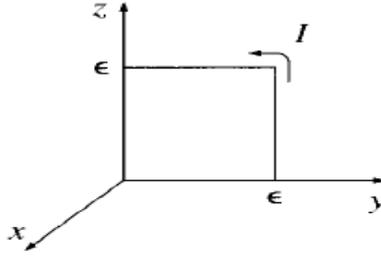


Figura 7: Problema 12

13 - Mostre que o campo magnético de um dipolo pode ser escrito na forma livre de coordenadas:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]$$

14 - Um circuito circular de fio, com raio  $R$ , está no plano  $xy$  centrado na origem e por ele passa uma corrente  $I$  no sentido anti-horário, olhando-se do eixo  $z$  positivo.

(a) Qual é o seu momento de dipolo magnético?

(b) Qual é o campo magnético (aproximado) para pontos distantes da origem?

(c) Mostre que, para pontos no eixo  $z$ , sua resposta é coerente com o campo *exato*, quando  $z \gg R$ .

15 - O campo magnético no eixo de um circuito circular de corrente, de raio  $R$ , dado pela equação

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

está longe de ser uniforme (ele diminui acentuadamente com o aumento de  $z$ ). Você pode produzir um campo mais uniforme usando *dois* circuitos desses a uma distância  $d$  um do outro (figura 8).

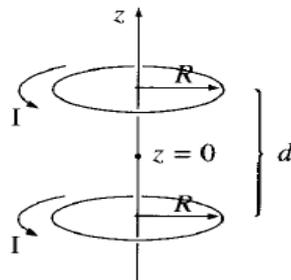


Figura 8: Problema 15

(a) Encontre o campo ( $B$ ) como função de  $z$ , e mostre que  $\partial B/\partial z$  é zero no ponto a meio caminho entre eles ( $z = 0$ ). Agora, se você escolher  $d$  corretamente, a *segunda* derivada de  $B$  também irá se anular no ponto médio. Este arranjo é conhecido como **bobina de Helmholtz**; é uma maneira conveniente de produzir campos relativamente uniformes em laboratório.

(b) Determine  $d$  de forma que  $\partial^2 B/\partial z^2 = 0$  no ponto médio e encontre o campo magnético resultante no centro. [Resposta:  $8\mu_0 I/5\sqrt{5}R$ ]

16 - Calcule o torque exercido sobre a espira quadrada na figura 9, devido à espira circular (assuma que  $r$  é muito maior que  $a$  ou  $b$ ). Se a espira quadrada estiver livre para girar, qual será a sua orientação de equilíbrio?

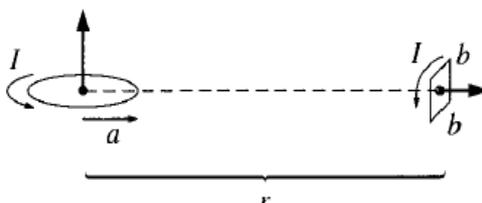


Figura 9: Problema 16

17 - Considere um solenoide muito longo, que consiste de  $n$  voltas compactas por unidade de comprimento, em torno de um cilindro de raio  $R$  pelo qual passa uma corrente estacionária  $I$  conforme a figura 10. Para essa configuração, verifique a condição de contorno  $\mathbf{B}_{\text{acima}} - \mathbf{B}_{\text{abaixo}} = \mu_0(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}})$ , onde  $\mathbf{K}$  é a densidade superficial de corrente e  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário perpendicular à superfície, apontando 'para cima' (figura 11).

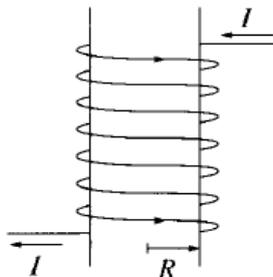


Figura 10: Problema 17

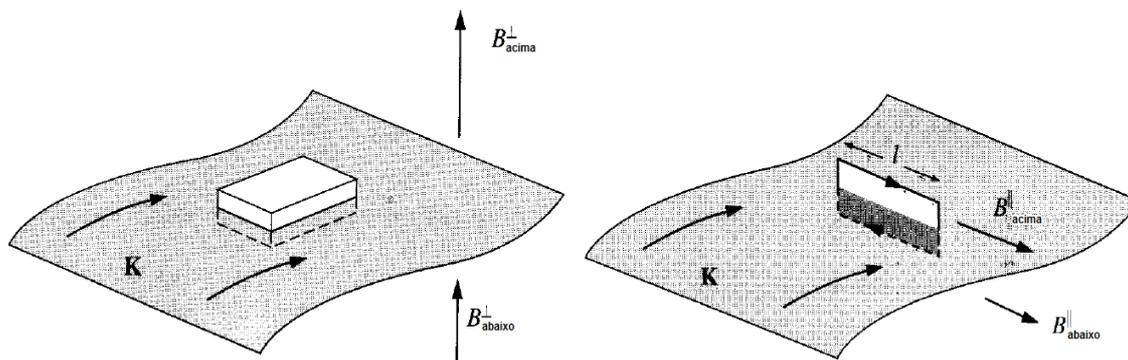


Figura 11: Problema 17

18 - (a) Verifique as condições de contorno para o potencial vetorial, i.e  $\mathbf{A}_{\text{acima}} = \mathbf{A}_{\text{abaixo}}$  e  $\frac{\partial A_{\text{acima}}}{\partial n} - \frac{\partial A_{\text{abaixo}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$ , para o problema da casca esférica de raio  $R$ , densidade de carga superficial uniforme  $\sigma$ , e que é colocada para girar com uma velocidade angular  $\omega$  (figura 12)

(b) Encontre o momento de dipolo magnético da casca esférica giratória. Mostre que para os pontos  $r > R$  o potencial é o de um dipolo perfeito.

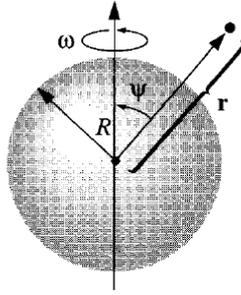


Figura 12: Problema 18

**19** - Uma corrente uniforme de densidade  $\mathbf{J} = J_0\hat{\mathbf{z}}$  enche uma chapa apoiada sobre o plano  $yz$ , de  $x = -a$  a  $x = +a$ . Um dipolo magnético  $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{x}}$  está situado na origem.

(a) Encontre a força sobre o dipolo usando a equação  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ .

(b) Faça o mesmo para um dipolo que aponta na direção  $y$ :  $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$

(c) No caso *eletrostático* as expressões  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$  e  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$  são equivalentes (prove), mas esse *não* é o caso para os análogos magnéticos (explique por quê). Como exemplo, calcule  $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$  para as configurações em (a) e (b).

**20** - Um cilindro infinitamente longo tem magnetização uniforme  $\mathbf{M}$  paralela ao seu eixo. Encontre o campo magnético (devido a  $\mathbf{M}$ ) dentro e fora do cilindro.

**21** - Um longo cilindro circular de raio  $R$  tem magnetização  $\mathbf{M} = ks^2\hat{\phi}$ , onde  $k$  é a distância a partir do eixo e  $\hat{\phi}$  é o vetor unitário azimutal usual (figura 13). Encontre o campo magnético devido a  $\mathbf{M}$ , para pontos internos e externos ao cilindro.

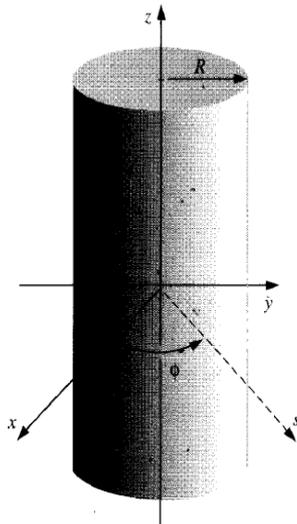


Figura 13: Problema 21

**22** - Um cilindro infinitamente longo de raio  $R$ , tem magnetização 'congelada' paralela ao eixo.

$$\mathbf{M} = ks\hat{\mathbf{z}},$$

onde  $k$  é uma constante e  $s$  é a distância ao eixo. Não há corrente livre em lugar algum. Encontre o campo magnético dentro e fora do cilindro por dois métodos diferentes:

(a) Localize todas as correntes ligadas e calcule o campo que elas produzem.

(b) Use a Lei de Ampère na forma  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc}$  (onde  $I_{enc}$  é a corrente *livre* total que passa pela curva amperiana) para encontrar  $\mathbf{H}$ , e em seguida obtenha  $\mathbf{B}$  a partir da equação  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ . (Observe que o segundo método é muito mais rápido e evita qualquer referência explícita às correntes ligadas.)

**23** - Um cabo coaxial consiste de dois tubos cilíndricos muito longos, separados por material isolante de suscetibilidade  $\chi_m$ . Uma corrente  $I$  passa pelo condutor interno e retorna ao longo do externo; em cada caso a corrente se distribui uniformemente sobre a superfície (figura\*). Encontre o campo magnético na região entre tubos. Como verificação, calcule a magnetização e as correntes ligadas, confirmando que (juntamente, é claro, com as correntes livres) elas geram o campo correto.

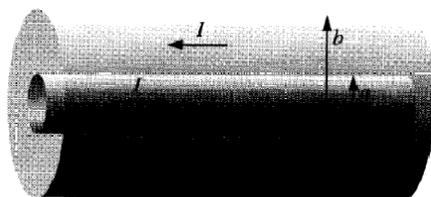


Figura 14: Problema 23

**24** - Uma corrente  $I$  passa por um fio longo e reto de raio  $a$ . Se o fio for feito de material linear (digamos cobre, ou alumínio) com suscetibilidade  $\chi_m$ , e a corrente for uniformemente distribuída, qual será o campo magnético a uma distância  $s$  do eixo? Encontre todas as correntes de magnetização. Qual é a corrente de magnetização *líquida* que passa pelo fio?

**25** - Se  $\mathbf{J}_l = 0$  em toda parte, o rotacional de  $\mathbf{H}$  se anula (da equação  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l$ ), e podemos expressar  $\mathbf{H}$  como o gradiente de um potencial escalar  $W$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla W .$$

Segundo a equação  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ , então,

$$\nabla^2 W = (\nabla \cdot \mathbf{M}) ,$$

de forma que  $W$  obedece à equação de Poisson, com  $\nabla \cdot \mathbf{M}$  como a 'fonte'. Isso torna possível utilizar, por analogia, todo o mecanismo usado no caso eletrostático, visto anteriormente. Como exemplo, encontre o campo dentro de uma esfera uniformemente magnetizada pela separação de variáveis. [Dica:  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$  em toda parte exceto na superfície ( $r = R$ ), de forma que  $W$  satisfaz a equação de Laplace nas regiões  $r < R$  e  $r > R$ ; use a solução geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas e, a partir da condição de contorno

$$H_{acima}^\perp - H_{abaixo}^\perp = -(M_{acima}^\perp - H_{abaixo}^\perp) ,$$

encontre a condição de contorno apropriada para  $W$ .]

**26** - Uma esfera de material magnético linear é colocada em um campo magnético  $\mathbf{B}_0$  que inicialmente é uniforme. Encontre o novo campo dentro da esfera ( ver problema 25).

27 - Observe o seguinte paralelo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, & \text{(não há carga livre);} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{H} = 0, & \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}, & \text{(não há corrente livre).} \end{cases}$$

Assim, a transcrição  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P} \rightarrow \mu_0 \mathbf{M}$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$  torna um problema eletrostático em um problema magnetostático análogo. Use esta observação juntamente com o seu conhecimento de resultados eletrostáticos para rededuzir

- (a) o campo magnético dentro de uma esfera uniformemente magnetizada (i.e.,  $\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}$ );
- (b) o campo magnético dentro de uma esfera de material magnético linear em um campo magnético que inicialmente é uniforme (ver problema 26).